УДК 681.3.06
DOI https://doi.org/10.32782/2663-5941/2025.5.2/30

Редько Д.І.
Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору
Національної академії наук України

Редько І.В.
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

ПРИМІТИВНІ ПРОГРАМНІ АЛГЕБРИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ НАД МУЛЬТИДОМЕННИМИ КОРТЕЖАМИ ТА РЕЛЯЦІЯМИ

В роботі запропоновано, базований на ізоморфізмі ППА, метод вирішення проблем повноти для класів обчислюваних функцій. Отримано повні системи породжуючих для ППА обчислюваних функцій над мультидоменними кортежами та реляціями.

Характерною рисою сьогодення є стрімкі темпи інформатизації майже у всіх галузях діяльності людини. Інформатико-технологічне забезпечення предметних та управлінських процесів вимагає застосування складних багатовимірних і багатодоменних (полідоменних, мультидоменних) структур даних: матриць, кортежів, реляцій, графів тощо. Одночасно із цим, жорсткішими стають вимоги і до самого програмного забезпечення та технологій його розробки. Задоволення їх ускладнене в умовах, коли програма у значній мірі є витвором мистецтва, якісні характеристики якого оцінюються лише опосередковано, за результатами його зовнішніх характеристик та його використання. Усунення цих труднощів полягає у переході від мистецтва до технології програмування. Тому створення та розвиток реальних засад технологізації програмування, що спираються на причино-наслідкове взаємодоповнення програмування та програми, має вирішальне значення.

Проведені в роботі дослідження базуються на алгебраїчних методах дослідження програм та методах композиційного програмування. Основу останніх складають програмні алгебри, носіями яких є спеціальні класи функцій, а операціями – композиції, що представляють собою абстракції від засобів синтезу програм. А саме: в роботі досліджено поняття ізоморфізму у примітивних програмних алгебрах (ППА); вирішено проблему повноти ППА у класах обчислюваних функцій та предикатів над зліченими носіями; надано строге визначення понять мультидоменного кортежу та мультидоменної реляції, досліджено їх засадничі, для подальших побудов, властивості. Необхідно зазначити, що вибір мультидоменних структур був обумовлений їх важливістю та активним у інформаційному забезпеченні рішень прикладних задач у різних галузях.

Поряд із загальними результатами про повноту отримано ППА-характеристики класів обчислюваних функцій та предикатів над мультидоменними кортежами та мультидоменними реляціями. Ці прикладні результати доповнюють результати для векторних, матричних та реляційних обчислюваних функцій та змістовно збагачують їх у контексті технологізації програмування.

Ключові слова: *ППА, кортеж, мультидоменність, реляція, обчислюваність, ізоморфізм.*

Постановка проблеми. Дослідження проводяться на фоні притаманного будь-якій продуктивній галузі класичного діалектичного протиставлення продуктивної діяльності та продукту. У програмуванні воно проявляється у неможливості в рамках традиційної індивідно-суб'єктивної парадигми [1] об'єктивізувати та реально підтримати найголовніше – причинно-наслідкові зв'язки усередині програмної генези як реальності, невіддільної від її наслідку. Досвід вирішення подібних проблем у різних галузях виробництва [2] свідчить, що саме вони є визначальними у формуванні засадничих властивостей та структурних особливостей будь-якого, зокрема і програмного продукту. Тому, для подолання згаданої суперечності на базі традиційної індивідно-суб'єктивної парадигми необхідно розвинути нову, інтерсуб'єктивну парадигму [1], що залучає до розгляду структури, що підтримують причино-наслідкове взаємодоповнення генези програмного продукту та її наслідку – генетичні структури або композиції [1, 3, 4]. Тут вони уточнюються як сигнатурні операції (композиції) ППА, що побудовані на основі стандартних структур управління більшості високорівневих мов програмування.

В рамках інтерсуб'єктивної парадигми [1], отримано важливі, як у теоретичному, так і прикладному програмуванні ППА-характеристики класів обчислюваних функцій та предикатів на мультидоменних структурах даних, які сьогодні активно досліджуються і застосовуються у практиці інформатико-технологічної діяльності [5-9]. Отримані результати забезпечують продукування рішень, коректність яких випливає з їх побудови.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Забезпечити можливість переходу від рішень окремих задач до вирішення класів подібних задач з гарантованою коректністю отримуваних рішень було і залишається основним спонукальним мотивом створення більшості парадигм програмування. У тому чи іншому вигляді важливість цього знайшла своє відображення, зокрема, у Тьюрінговських лекціях Джона Бекуса, Едсгера Дейкстра, Джона Мак-Карті, Роберта Флойда [10]. Визначні вчені, які зробили вагомий внесок у розбудову засад у тому числі і комп’ютерної науки та програмування у цілому, такі як Алонзо Чорч, Стівен Кліні, Гаскелл Каррі, Ніклаус Вірт, Алан Кей, Девід Гріс та ін. у своїй діяльності також керувались проблемами підвищення продуктивності та забезпечення коректності отримуваних рішень [11-16]. Реінжиніринг програмного забезпечення з лавиноподібним зростанням інвестицій у його розробку став самоочевидним трендом розвитку інформаційних технологій та програмування [17, 18]. Віддаючи належне видатним досягненням, зробленим у цьому напрямку, тим не менше, необхідно звернути увагу на те, що всі вони з об’єктивних причин слабко інтегровані між собою. Адже їх адекватна інтеграція потребувала розгляду ряду питань, для вирішення яких не було достатньої фактографії. Такими, зокрема, є питання об'єктивізації суб’єктивних впливів на вирішення задач, переходу від систем, орієнтованих на замкнуті у конкретиці рішення, до систем, орієнтованих на вирішення класів задач, підтримки причино-наслідкового зв'язку програмування та програми та залучення у розгляди семантичних композиційних структур, що підтримують його.

Спрямованість проводимих в роботі досліджень на генетичні структури дозволяє враховувати активну роль суб’єкта у програмуванні. На відміну від більшості традиційних підходів, що орієнтовані на синтаксичну нотацію результатів свідомого чи несвідомого застосування таких генетичних структур. Таким чином, маємо достатньо підстав розглядати рефлексивно-транзитивне замикання базованого на композиціях причино-наслідкового відношення, як продуктивну експлікацію програмування рішень задач обробки мультидоменних структур даних.

Метою статті є композиційні засади інтерсуб'єктивної парадигми програмування, базований на них метод ППА-ізоморфних відображень та дослідження за допомогою нього алгебраїчних характеристик класів обчислюваних функцій та предикатів над мультидоменними структурами даних.

Виклад основного матеріалу. Носієм ППА є n-арні функції та n-арні предикати для $n = 1$, 2, … [3, 4]. При їх позначенні буде використовуватись як операторна, так і термальна форми запису [19, 20].

Сигнатуру ППА (позначатимемо її Ω) складають операції n-арної суперпозиції, розгалуження та $(n+1)$-арного циклування, що являють собою адекватні уточнення стандартних методів генезису програм, що представлені т.з. управляючими структурами в більшості мов програмування. Задля зручності нагадаємо формальне визначення $(n+1)$-арного циклування – найскладнішої параметричної операції сигнатури ППА.

Нехай задані m функцій $f_1, \dots, f_m$ однакової арності (наприклад, k) вигляду $A^k \to B$, визначені на деякій попередньо зафіксованій множині A зі значеннями з множини B та k-арний предикат $p: A^k \to \{T, F\}$. Розглянемо k-арну функцію $g: A^k \to B$, значення якої $g(< a_1, \dots, a_k >)$ на довільному аргументі $< a_1, \dots, a_k > \in A^k$ вважається рівним першій компоненті першого кортежу послідовності кортежів $[\langle a_1^i, \dots, a_k^i \rangle]_{i=0,1,2,\dots}$, де $a_j^0 = a_j |_{j=1,2,\dots,k}$ та $a_j^{i+1} = f_j(\langle a_1^i, \dots, a_k^i \rangle)|_{j=1,2,\dots,k}$, для якого (наприклад, $\left[\langle a_1^s, \dots, a_k^s \rangle\right]$) $p\left(\langle a_1^s, \dots, a_k^s \rangle\right) = F$, при умові, що для усіх $r = 1, 2, \dots, s-1$ значення $p\left(\langle a_1^r, \dots, a_k^r \rangle\right) = T$. Функція g виникає застосуванням $m+1$-арної операції *циклювання* до функцій кортежу $p, f_1, \dots, f_m$. Домовимось позначати її $g \equiv *^{m+1}\left(\langle p, f_1, \dots, f_m \rangle\right)$. Таким чином, у відповідності до сказаного, $g\left(< a_1, \dots, a_k >\right) = a_1^s$.

Зафіксуємо деяку злічену множину D і надалі під *функціями* (*предикатами*), а при необхідності явним чином вказати множину D – D-*функціями* (D-*предикатами*) будемо розуміти часткові багатомісні функції з аргументами і значеннями із

D (часткові багатомісні предикати з аргументами із D та значеннями із $\{T,F\}$, де $T(F)$ означає істинісне значення «істина» («хиба»)).

Обчислюваність на D вводиться як нумераційна обчислюваність [21]. Через $A_D^{чр}$ позначимо ППА, носій якої складають частково-рекурсивні функції та частково-рекурсивні предикати (чр-функції та чр-предикати) на D .

Породжуючу множину алгебри $A_D^{чр}$ назвемо її повною системою (ПС), а повну систему $A_D^{чр}$ її I_m^n-базисом [3], якщо будь-яка її підсистема, що утворюється видаленням будь-якої функції (предиката), відмінної від селекторної функції, вже не буде повною.

Для дослідженні повних систем ППА корисними будуть наступні властивості та пов'язані з ними результати.

Визначення 1. Функція f арності n (або коротко, f^n) зберігає множину $L \subset D, L \neq \varnothing$, якщо $f\left(L^n\right) \subseteq L$, L^n – декартова ступінь множини L [22, 23].

Зафіксуємо деяке відображення $\beta : D \to 2^B$, де B – деяка злічена множина, а 2^B – множина всіх скінчених підмножин множини B. Вважається, що D складається зі скінчених об'єктів, побудованих з елементів множини B та $\beta(d) \in 2^B |_{d \in D}$. – набір "складових" d [22, 23].

Визначення 2. Функція f арності n β-зберігає денотати, якщо існує скінчена множина $B_f \in 2^B$ така, що для всіх $\langle d_1,\ldots,d_n \rangle \in dom(f)$: $\beta(f(d_1,\ldots,d_n)) \subseteq \cup_{i=1}^{n} \beta(d_i) \cup B_f$.

Справедливими є наступні твердження.

Твердження 1. Будь-яка ПС алгебри $A_D^{чр}$ для будь-якої множини L ($L \subset D$, $L \neq \varnothing$) повинна містить хоча б одну функцію, що не зберігає L .

Твердження 2. Будь-яка повна система алгебри $A_D^{чр}$ повинна містить хоча б одну функцію, що не є β-зберігаючою денотати.

Коротко розглянемо загальний підхід до побудови повних систем ППА чр-функцій та чр-предикатів над заданими зліченими множинами. Для цього зафіксуємо основні передумови розгляду, уведемо деякі поняття і встановимо систему позначень. Сам же метод буде представлений низкою взаємопов'язаних результатів, сформульованих у вигляді доведених у процесі викладення лем та теорем.

Метод базується на теоремі про ізоморфізм ППА.

1. Зафіксуємо дві злічені множини D_1 та D_2, для яких існують ефективні (в інтуїтивному сенсі) нумерації $\alpha_1 : N \to D_1$ та $\alpha_2 : N \to D_2$ і розглянемо ППА $A_{D_1}^{чр}$ та $A_{D_2}^{чр}$. Тут під ефективністю нумерації розуміється, що а) для будь-якого $n \in N$ ефективно будується об'єкт $\alpha_i(n)|_{i=1,2}$ та б) для будь-якого $d_i \in D_i |_{i=1,2}$ ефективно будується його номер (згідно відповідної нумерації).

2. Нехай також задані ефективні ін'єктивні відображення $\varphi: D_2 \to D_1$ та $\Phi: D_1 \to D_2$, причому множини $\varphi(D_2)$та $\Phi(D_1)$ – рекурсивні [9, 10].

3. Співставляючи кожній D_2-функції D_1-функцію, що представляє її (у відображенні Ф) та роблячи аналогічне для D_1- та D_2-предикатів, будуємо бієкцію θ_Φ з носія ППА $A_{D_2}^{чр}$ на носій $A_{D_1}^{чр}$.

4. Домовляючись природним чином про одноіменні сигнатурні операції (суперпозиціям відповідають суперпозиції і т.д.), отримуємо просту та корисну теорему.

Теорема 1. Відображення θ_Φ – ізоморфізм ППА $A_{D_2}^{чр}$ на ППА $A_{D_1}^{чр}$

1. Нехай, для алгебри $A_{D_1}^{чр}$ відома її ПС σ_{D_1}.

2. Позначатимемо елементи множин $D_i |_{i=1,2}$ буквами a_i, b_i, c_i, $d_i, \ldots$ можливо з додатковими індексами.

3. У якості функціональних (предикатних) символів для D_i-функцій (D_i-предикатів) будемо використовувати рядкові (прописні) букви латинського алфавіту $f,g,\ldots(F,G,\ldots)$ та $p,r,\ldots(P,R,\ldots)$, можливо з індексами. Змінні для для D_i – функцій (D_i-предикатів) будемо позначати рядковими буквами латинського та грецького алфавітів $x,y,\ldots$ ($\xi,\pi,\ldots$), можливо з індексами, відповідно.

4. Частково-рекурсивні D_i-функції будемо також називати D_i-чр-функціями. Часткова рекурсивність розуміється у сенсі нумераційного підходу [20].

Визначення 3. $\varphi(D_2)$-функцію $f(x_1,\ldots,x_n)$ називатимемо D_1 - образом D_2-функції $F(\xi_1,\ldots,\xi_n)$, якщо $f\left(\varphi\left(d_{2_1}\right),\ldots,\varphi\left(d_{2_n}\right)\right) = \varphi(F\left(d_{2_1},\ldots,d_{2_n}\right)$, для всіх $d_{2_1},\ldots,d_{2_n} \in \varphi(D_2), \overline{\varphi}(D_2) \subseteq D_1$.

Визначення 4. D_2-функцію $F(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ називатимемо D_2-моделлю D_1-функції $f(x_1,\ldots,x_n)$, якщо $F\left(\Phi(d_{1_1}),\ldots,\Phi(d_{1_n})\right) \cong \Phi(f(d_{1_1},\ldots,d_{1_n}))$, для всіх $d_{1_1},\ldots,d_{1_n} \in D_1$. D_2-модель D_1-предиката вводиться аналогічним чином.

З того, що при ізоморфізмі θ_Φ селекторні функції переходять у селекторні, а при ізоморфізмі алгебр повні системи переходять у повні системи, має місце наступне твердження.

Твердження 3. Існує повна система алгебри $A_{D_2}^{чр}$, що складається, з точністю до селекторних функцій, з D_2-моделей D_1-функцій та D_1-предикатів з σ_{D_1}.

Дане твердження принципово вирішує проблему повноти для ППА виду $A_{D_2}^{чр}$.

З зазначеного випливає справедливість леми.

Лема 1. D_1-образом D_2-чр-функції (D_2-чр-предиката) є $\varphi(D_2)$-чр-функція ($\varphi(D_2)$-чр-предикат).

Справедливість даного твердження випливає з ефективності нумерацій α_{D_1}, α_{D_2} та того, що відображення φ нумерованої множини $\langle D_2, \alpha_{D_2} \rangle$ на нумеровану множину $< \varphi(D_2), \alpha_{D_2}\left(\alpha_{D_2}^{-1}(\varphi(D_2))\right) >$, згідно теореми 2.1.5 [21], є чр-еквівалентністю.

З рекурсивності множини $\varphi(D_2)$ випливає наступна лема.

Лема 2. Будь-яка $\varphi(D_2)$-чр-функція є D_1-чр-функцією.

Наслідок 1. D_1-образ D_2-чр-функції є D_1-чр-функцією.

Нехай $\psi = \varphi \cdot \Phi$, у сенсі $\psi: D_2 \to \Phi(\varphi(D_2))$. Очевидно, що ψ – бієкція. Через χ позначимо деяке розширення ψ^{-1}. D_2-функції ψ та χ відіграють, відповідно, ролі кодуючої та декодуючої функцій у зазначеному вище сенсі.

Позначимо через σ_{D_2} сукупність D_2-функцій та D_2-предикатів, що задовольняють наступним умовам:

1. D_2-модель D_1-функції з сукупності σ_{D_1} можна побудувати з функцій та предикатів сукупності σ_{D_2} скінченим застосуванням операцій ППА;
2. Функції ψ та χ можуть бути побудовані з функцій та предикатів сукупності σ_{D_2} скінченим застосуванням операцій ППА.

Визначення 5. Впорядковану шістку $< D_1, D_2, \sigma_{D_1}, \sigma_{D_2}, \psi, \chi >$ називатимемо припустимою системою (ПР-системою).

Очевидно, має місце наступне твердження.

Лема 3. Нехай $F(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ – D_2-чр-функція, а $H(\pi_1,\ldots,\pi_n)$ – D_2-модель D_1-образа функції $F(\xi_1,\ldots,\xi_n)$. Тоді $F\left(d_{2_1},\ldots,d_{2_n}\right) \cong \chi\left(H\left(\psi\left(d_{2_1}\right),\ldots,\psi\left(d_{2_n}\right)\right)\right)$, для всіх $d_{2_1},\ldots,d_{2_n} \in D_2$. Аналогічно, нехай $P(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ – D_2-чр-предикат, а $R(\pi_1,\ldots,\pi_n)$ – D_2-модель D_1-образа $P(\xi_1,\ldots,\xi_n)$. Тоді $P\left(d_{2_1},\ldots,d_{2_n}\right) \cong R\left(\psi\left(d_{2_1}\right),\ldots,\psi\left(d_{2_n}\right)\right)$, для всіх $d_{2_1},\ldots,d_{2_n} \in D_2$.

Звідси випливає справедливість наступного твердження.

Теорема 2. Множина σ_{D_2} – повна система алгебри $A^{\text{чр}}_{D_2}$.

Елементи множин D_1 та D_2 – абстрактні об'єкти. До самих же множин були висунуті вкрай загальні вимоги. Це дозволяє сформулювати просту загальну умову повноти системи функцій та предикатів.

Нехай, $D_1, D_2, \sigma_{D_1}, \sigma_{D_2}, \psi, \chi$ – об'єкти, введені вище. Має місце наступне твердження – достатня умова повноти системи функцій та предикатів.

Теорема 3 (достатня умова повноти). Якщо $< D_1, D_2, \sigma_{D_1}, \sigma_{D_2}, \psi, \chi >$ є ПР-системою, то σ_{D_2} – повна система алгебри $A^{\text{чр}}_{D_2}$.

ППА чр-функцій та чр-предикатів над мультидоменними кортежами

Нехай дано деяку злічену множину A, що розуміється як базовий універсальний злічений домен [19, 20] і над цією множиною задано скінчену множину похідних доменів $\{D_1, \ldots, D_s\}|_{s\in 1,2,3\ldots}$. Останньому надамо строгий зміст, наприклад, так: $D_k \subseteq \{k\} \times A$, $k \in \{1, \ldots, s\}$. Множину $A_k: A_k = pr_2^2(D_k)$ трактуватимемо надалі як носій домену D_k. Тут pr_k^n – параметрична операція проекції n-арного відношення $R \subseteq S_1 \times \ldots \times S_k \times \ldots \times S_n$ по k-тому множнику, тобто: $pr_k^n(R) \subseteq S_k|_{k\le n, n\in N, S_k \subseteq A}$. Не вимагається, щоб $\bigcup_{i=1}^s A_i$ співпадало з A та допускається, що перетин $\bigcap_{i=1}^s A_i$ є непустим. Позначимо через D_1^s множину, що представляє собою об'єднання доменів $D_1, \ldots, D_s$, тобто, $D_1^s \equiv \bigcup_{i=1}^s D_i$. Домовимось, що кожний домен D_k, як і відповідний носій A_k є зліченими (відповідні ефективні нумерації позначимо $\alpha_{D_k}: N_{\alpha_{D_k}} \to D_k$ та $\alpha_{A_k}: N_{\alpha_{A_k}} \to A_k$, $N_{\alpha_{D_k}} \subseteq N$ та $N_{\alpha_{A_k}} \subseteq N$, відповідно) та лінійно впорядкованими. Звідси безпосередньо випливає існування ефективної нумерації $\alpha_{D_1^s}: N_{\alpha_{D_1^s}} \to D_1^s$, $N_{\alpha_{D_1^s}} \subseteq N$. При цьому у ефективність нумерації $\alpha: N_\alpha \to B$ вкладається наступний зміст: 1) номерна множина N_α є ефективно заданою; 2) по будь-якому $a \in N_\alpha$ ефективно будується об'єкт $\alpha(a)$; 3) по будь-якому $b \in B$ ефективно будується об'єкт a такий, що $\alpha(a) = b$. Властивість 1 уточнимо вимогою рекурсивності множини N_α, властивість 2 – існуванням алгоритму перевірки рівності $\alpha(a') = \alpha(a'')|_{a',a''\in N_\alpha}$, властивість 3 – означає, що множина B складається із конструктивних об'єктів. При цьому, питання конструктивності вимагає окремого розгляду і тут зачіпатися не буде. Всі ж конкретні відображення, зокрема нумерації, використовувані тут задовольнятимуть умовам 1-3. Зокрема, з ефективності $\alpha_{D_1^s}$ слідує існування оберненого до неї ефективного відображення $\alpha_{D_1^s}^{-1}$.

Визначення 6. Мультидоменним $n-$арним кортежем називається елемент декартового добутку $(D^s)^n \equiv \underbrace{D^s \times \ldots \times D^s}_{n}$. Множина D^s така, що $D^s \equiv \{\Lambda\} \cup (\bigcup_{i=1}^{\infty} (D_1^s)^i)$, де Λ – т.з. "пустий", тобто такий, що не має жодного елементу, мультидоменний кортеж, є множиною всіх мультидоменних кортежів над множиною доменів $\{D_1, \ldots, D_s\}$ або коротше – $\{D_1, \ldots, D_s\}$-кортежів.

Введемо деякі користі позначення. А саме, $\mathfrak{D}_\Lambda \equiv \{\Lambda\}$, $\mathfrak{D}_0 \equiv \langle\langle 1,0 \rangle\rangle$, $\mathfrak{D}_{\langle i \rangle} \equiv \{\langle d \rangle \mid d \in D_i\}|_{i\in\{1,\ldots,s\}}$, тобто, $\mathfrak{D}_{\langle i \rangle} = (D_i)^1$ та $\mathfrak{D}_{\langle i \rangle} \neq D_i$, ...,

$\mathfrak{D}_{\langle k,t\rangle} \equiv D_k \times D_t |_{k,t\in\{0,1,\ldots,s\}}$,... та загалом $\mathfrak{D}_{\langle i_1,\ldots,i_p\rangle} \equiv D_{i_1} \times \ldots \times D_{i_p}$, $\forall j \in \{1, \ldots, p\}|_{p\in N}: i_j \in \{1, \ldots, s\}$.

Для будь-якого p-арного $\{D_1,\ldots,D_s\}$-кортежу $\mathcal{K} \equiv \langle\langle i_1,a_1\rangle,\langle i_2,a_2\rangle,\ldots\langle i_p,a_p\rangle\rangle$, тобто $\mathcal{K} \in \mathfrak{D}_{\langle i_1,\ldots,i_p\rangle}$, де $i_j \in \{1, \ldots, s\}\&j \in \{1, \ldots, p\}\&p \in N$, кортеж $\pi^1(\mathcal{K}) \equiv \langle i_1,\ldots,i_p\rangle$ називатимемо його $\{D_1,\ldots,D_s\}$-типом, а $\pi^2(\mathcal{K}) \equiv \langle a_1,\ldots,a_p\rangle$ – $\{D_1,\ldots,D_s\}$-денотатом. Тут і далі запис $\langle\langle i_1,a_1\rangle,\langle i_2,a_2\rangle,\ldots\langle i_p,a_p\rangle\rangle$ використовуватимемо як "розгорнуте" представлення для $\mathcal{K}$. Число p називатимемо його рангом (арністю) і позначатимемо $r(\mathcal{K})$.

Зі скінченності множини $\{D_1,\ldots,D_s\}$, зліченості всіх її елементів та того, що множина всіх $\{D_1,\ldots,D_s\}$-типів $T_{\{D_1,\ldots,D_s\}}$ мультидоменних кортежів є рівнопотужною з множиною всіх слів у скінченому алфавіті $\{1,\ldots,s\}$ і тому є зліченою (див., наприклад, п.11.1 [20]), безпосередньо випливає наступне твердження.

Твердження 4. Множина D_1^s є зліченою.

При побудові конкретної нумерації треба врахувати наступне: по-перше, існує єдиний конструктивний прийом $\delta^s: D_1^s \to N^*$, що для будь-якого непустого мультідоменного кортежу $\mathcal{K} \equiv \langle\langle i_1,a_1\rangle,\langle i_2,a_2\rangle,\ldots\langle i_k,a_k\rangle\rangle$ ставить у відповідність кортеж $L_{\mathcal{K}} \equiv< n_1, \ldots, n_k >$, де n_j є номером пари $< i_i, a_i >$[1] і по-друге, номер $\mathcal{K}$ співпадає з номером кортежу $L_{\mathcal{K}}$. Він може бути заданий, наприклад, так: $\alpha'(L_{\mathcal{K}}) \equiv 2^{n_1+1} \cdot 3^{n_2+1} \cdot \ldots \cdot p_{k-1}^{n_k+1}$, де $p_i, i = 0,1,2, \ldots$– i-те просте число ($p_0=2, p_1=3, p_2=5,\ldots$). Тоді шукана нумерація α_D множини D задається через наступну кускову схему $\alpha'_D: D \to N: \alpha'_D(\mathcal{K}) = \begin{cases} 1, \text{якщо } I = \Lambda \\ \alpha'(L_{\mathcal{K}}), \text{інакше} \end{cases}$, де $\mathcal{K}$ – деякий $\{D_1,\ldots,D_s\}$-кортеж. Через те, що α'_D є бієкцією, вважатимемо, що $\alpha_D = (\alpha'_D)^{-1}$.

З того, що будь-яка ефективна нумерація є частково-рекурсивно еквівалентною (чр-еквівалентною) однозначній простій нумерації [20] безпосередньо випливає наступне твердження.

Твердження 5. Будь-які дві ефективні нумерації множини D^s є чр-еквівалентними.

Таким чином, отримувані нижче результати не залежать від конкретних нумерацій. Тобто, можна без суттєвого впливу на репрезентативність подальших побудов розглянути випадок, коли $A_i = N$, $D_i = \{i\} \times N$, $N_{\alpha_i} = N$ і відповідно, $\alpha_i: N \to D_i, \alpha_i(n)|_{n\in N} =< i, n >$. Змістовна суть так уведених нумерацій полягає у впровадженні над відповідними доменами обумовлених нумераціями їх лінійних впорядкованостей. Домовимось також, що з кожним доменом $D_i, i \in \{1, \ldots, s\}$ буде пов'язана відмітка i, яка співпадатиме з його індексом у позначенні. З огляду на це, нумерація $\alpha_{D_1^s}: N \to D_1^s$ може бути задана, наприклад, так:

$$\alpha_{D_1^s}(n)|_{n\in N} = \begin{cases} < mod(n,s), div(n,s) + 1 >, \text{якщо } mod(n,s) \neq 0 \\ < s, div(n,s) >, \text{ якщо } mod(n,s) = 0 \end{cases}$$

Тут функції $mod(n,s), div(n,s)$ розуміються як бінарні арифметичні функції взяття залишку та цілої частини від ділення з остачею. При цьому, число s, що відповідає кількості доменів

З результатів попереднього розділу та тверджень 1 та 2 безпосередньо випливає, що алгебраїчна характеристика класу багатомісних чр-функцій та чр-предикатів на D^s може бути отримана на основі підходящої ПР-системи. У якості її основи оберемо пару $< N^*, \sigma_{N^*} >$, де N^* – множина векторів (кортежів) натуральних чисел, а σ_{N^*} – I_m^n–базис ППА $A_{N^*}^{чр}$ [3]. Таким чином, для отримання алгебраїчної характеристика класу чр-функцій та чр-предикатів на D^s (надалі використовуватимемо для нього позначення – $\mathcal{F}_{D^s}^{чр}$) потрібно визначитись з кодуючою та декодуючою D^s – чр-функціями ψ^s, χ^s та сукупністю σ_{D^s} – відповідним ізоморфним образом I_m^n–базису σ_{N^*} [20, 21].

Принципова відмінність мультідоменного кортежу від звичайного (у цьому сенсі, однодоменного кортежу) полягає у тому, що перший продуктивно "збагачений" інформацією про декартовий добуток доменів, до якого він належить. Тому кодуюча, декодуюча функції, а також операції та предикати над мультідоменними кортежами повинні ефективно враховувати цю "збагаченість". По суті, вона зводиться до врахування відповідних нумерацій доменів (див. твердження 1, 2).

Звернемось до кодуючого та декодуючого відображень між множинами мультідоменних та звичайних (у змістовному сенсі, однодоменних) кортежів, D^s та N^*. Із зазначеного вище безпосередньо випливає, що відображення $\delta^s: D^s \to N^*$ є бієкцією. Дана бієкція не є D^s-функцією. Але враховуючи існування ефективних нумерацій для множин D^s та N^* і, як наслідок, конструктивності об'єктів, які входять до них, відображення δ^s може бути використано для безпосередньої побудови кодуючого відображення $\varphi^s: D^s \to N^*$.

Кодуюче відображення $\varphi^s: D^s \to N^*$ може бути представлене так: $\varphi^s(\Lambda) = \Delta$, Δ, – звичайний "пустий" кортеж [4], $\varphi^s(\mathcal{K}) = \delta^s(\mathcal{K})|_{\mathcal{K}\in D,\mathcal{K}\neq\Lambda}$. Враховуючи це, легко переконатися, що φ^s є бієкцією, а множина $\mathcal{V}^s = \varphi^s(D) = N^*$ є рекурсивною (у нумерації $\alpha_{N^*}: N \to N^*$ [23, 24]).

Легко пересвідчитися, що φ^s є чр-еквівалентністю [20].

Твердження 6. Будь-яка чр-$\varphi(D^s)$-функція є чр-N^*-функцією.

Таким чином, кортежний образ чр-D^s-функції є кортежною чр-N^*-функцією.

[1] Ефективна нумерація множини N^2 побудована, наприклад, в [21]

Тепер розглянемо кодуюче відображення $\Phi: N^* \to D^s$ таке, що $\Phi(\Delta) = \Lambda$, $\Phi(<0>) =<< 1,0 >>$, $\Phi(< n_1, \dots, n_p >) =<< 1, n_1 >, \dots, < 1, n_p >> |_{n_i \in N;\, i,p \in N \setminus \{0\}}$.

Позначимо $\psi^s \equiv \varphi^s \cdot \Phi^s$ та χ^s – деяке розширення відображення $\left(\psi^s\right)^{-1}$. Зазначимо, що нумерації $\alpha_i : N \to D_i$, $\alpha_{D_1^s} : N \to D_1^s$ є ефективними бієкціями. При цьому, як вони, так і обернені до них функції $\alpha_i^{-1} : D_i \to N$, $\alpha_{D_1^s}^{-1} : D_1^s \to N$ виступають параметрами (мета-характеристиками) побудов, природа яких обмежена лише вимогою їх ефективності та не є предметом розгляду. Звідси, з тверджень 1-3 та з визначення функцій ψ^s та χ^s безпосередньо випливає, що вони є чр-D^s-функціями.

Розглянемо наступні D^s-функції та D^s-предикати:

C_0^1, – константна функція: $C_0^1(\mathcal{K}) = \langle \alpha_1(0) \rangle \equiv \langle\langle 1,0 \rangle\rangle$.

S_{D^s} – функція доменного слідування, аналог N^*-функції слідування, але з акцентом на домен 1-го елементу кортежу (у визначенні, це елемент з домену D_{i_1}). Тобто, це кускова функція, значення якої на конкре тному $\mathcal{K}$ формується наступним чином:

$$S_{D^s}(\mathcal{K}) = \\ = \begin{cases} \Lambda, \text{ для } \mathcal{K} = \Lambda \\ < \alpha_{i_1}(\alpha_{i_1}^{-1}(a_1) + 1), < i_2, a_2 >, \dots < i_k, a_k \gg, \\ \qquad \text{для } \mathcal{K} =<< i_1, a_1 >, < i_2, a_2 >, \dots < i_k, a_k >> |_{i_j \in \{1,\dots,s\}}^{j \in \{1,\dots,k\}} \end{cases}$$

$\circ_{D^s}$ – конкатенація двох $\{D_1, \dots, D_s\}$-кортежів: $\Lambda \circ_{D^s} \Lambda = \Lambda,$, $\mathcal{K} \circ_{D^s} \Lambda =$ $\Lambda \circ_{D^s} \mathcal{K} = \mathcal{K}, \mathcal{K}_1 \circ_{D^s} \mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_1 \mathcal{K}_2$;

Π_D – функція видалення першого елемента $\{D_1, \dots, D_s\}$-кортежу: $\Pi_{D^s}(\Lambda) = \Lambda$, $\Pi_{D^s}(\mathcal{K}) =<< i_2, a_2 >, \dots < i_k, a_k >>$;

$=_{D^s}$ – предикат рівності на множині D^s;

$I_m^n |_{m=\overline{1,n}}^{n=1,2,\dots}$ – селекторні функції.

Покладемо, що $\sigma_{D^s} \equiv \{\Pi_{D^s}, \circ_{D^s}, C_0^1, S_{D^s}, =_{D^s}, \psi^s, \chi^s, I_m^n |_{m=\overline{1,n}}^{n=1,2,\dots}\}|_{s=1,2,\dots}$. Всі перераховані D^s-функції та D^s-предикат є параметричними. Адже їх визначення суттєво залежить від значення параметру s, що пов'язаний з кількістю використовуваних доменів. При цьому, для будь-якого фіксованого значення s (нехай, для визначеності, $s = l$, де l – деяке фіксоване натуральне число), можна безпосередньо перевірити, що отримувані D^l-функції та D^l-предикат є частково-рекурсивними. Крім того, нескладно переконатися, що: D^l-функції $\Pi_{D^l}, \circ_{D^l}, C_0^1, S_{D^l}$ є D^l-моделями N^*-функцій $\Pi, \circ, C_0, S$ з σ_{N^*}; D^l-предикат $=_{D^l}$ є D^l-моделю N^*-предиката рівності векторів $=$; D^l-функції ψ^l, χ^l є D^l-моделями кодуючої та декодуючої функцій; клас всіх чр-D^l-функцій та чр-D^l-предикатів замкнутий відносно сигнатурних операцій ППА. Відповідні ППА позначатимемо $A_{D^l}^{\text{чр}}|_{l=1,2,\dots}$. Беручи до уваги результати попереднього розділу та те, що $\sigma_{N^*} \equiv \{\Pi, \circ, C_0, S, =, I_m^n\}|_{m=\overline{1,n}}^{n=1,2,\dots}$ – I_m^n-базис ППА $A_{N^*}^{\text{чр}}$, зі сказаного безпосередньо випливає, що для будь-якого фіксованого l, шістка $< N^*, D^l, \sigma_{N^*}, \sigma_{D^l}, \psi^l, \chi^l >$ є ПР-системою. Таким чином, справедливим є наступне твердження.

Теорема 4. Сукупність $\sigma_{D^l|_{l=1,2,\dots}}$ – повна система алгебри $A_{D^l}^{\text{чр}}|_{l=1,2,\dots}$.

Звернемося тепер до ППА обчислюваних $\{D_1, \dots, D_s\}$-реляційних функцій та предикатів та, за аналогією з попереднім розділом, побудуємо відповідну ПР-систему, основу якої складатиме ПС σ_{D^s}. При цьому, з огляду на аналогічність побудов, обмежимося тут викладенням лише принципових моментів, що стосуються специфіки мультидоменної реляції над доменами $\{D_1, \dots, D_s\}$.

Визначення 7. Мультидоменною реляцією або $\{D_1, \dots, D_s\}$-реляцією називається скінчена множина однотипних мультидоменних або $\{D_1, \dots, D_s\}$-кортежів.

Домовимось, що тип та ранг кортежів мультидоменної реляції R визначають її тип $\pi^1(R)$ та ранг $r(R)$, відповідно. Позначивши множину $\{D_1, \dots, D_s\}$-реляцій типу $\langle i_1, \dots, i_p \rangle$ через $R_{\langle i_1, \dots, i_p \rangle}$ маємо $R_s = \cup_{t \in T_{\{D_1, \dots, D_s\}}} R_t$. З результатів про ефективну зліченість множини $\{D_1, \dots, D_s\}$-кортежів та зліченності множини 2^N всіх скінчених підмножин множини натуральних чисел безпосередньо слідує, що і множина R_s також є зліченою. Для зручності будемо використовувати також розгорнуту форму для запису $\{D_1, \dots, D_s\}$-реляцій, а саме: запис $\left\{\left\langle \langle i_1, a_1^j \rangle, \langle i_2, a_2^j \rangle, \dots, \langle i_p, a_p^j \rangle \right\rangle\right\}^m$, де $j = \overline{1,m}$ означає мультидоменну m-рядкову реляцію типу $\langle i_1, \dots, i_p \rangle$.

Розглянемо наступні $\{D_1, \dots, D_s\}$-реляційні чр-функції та чр-предикат, позначаючи $\{D_1, \dots, D_s\}$-реляції типу t $\mathcal{A}^t, \mathcal{B}^t, \mathcal{C}^t \dots$, можливо з нижніми індексами, а при позначенні $\{D_1, \dots, D_s\}$-кортежів слідуючи за попереднім розділом. Усі функції, окрім $C_{\{\langle 0 \rangle\}}^1$, зберігають множини $\{\varnothing\}$ та $\{\{\rangle\ \}\}$, що далі не обумовлюється.

$C_{\{\langle 0 \rangle\}}^1$ – константна функція: $C_{\{\langle 0 \rangle\}}^1(\mathcal{A}) = \{\langle\langle 1,0 \rangle\rangle\}$;

$S_{D^s}^R$ – функція доменного слідування, аналог D^s-функції слідування S_{D^s}, але з акцентом на домен 1-го стовпчика мультидоменної реляції (у визначенні, це елемент з домену D_{i_1}). Тобто, це кускова функція, значення якої на конкретній $\mathcal{A}$ формується наступним чином:

$$S_{D^s}^R(\mathcal{A}) = \\ = \begin{cases} \{\Lambda\}, \text{ для } \mathcal{A} = \{\Lambda\} \\ \{< \alpha_{i_1}(\alpha_{i_1}^{-1}(a_1^j)) + 1), < i_2, a_2^j >, \dots, < i_p, a_p^j >>\}^m, \\ \qquad \text{для } \mathcal{A} = \{<< i_1, a_1^j >, < i_2, a_2^j >, \dots, < i_p, a_p^j >>\}^m \end{cases}$$

$\times^R_{D^s}$ – добуток двох $\{D_1,\dots,D_s\}$-реляцій: $\Lambda \times^R_{D^s} \Lambda = \Lambda$, $\mathcal{A} \times^R_{D^s} \Lambda = \Lambda \times^R_{D^s} \mathcal{A} = \mathcal{A}$,

$$\left\{\left\langle\left\langle i_1,a_1^j\right\rangle,\left\langle i_2,a_2^j\right\rangle,\dots,\left\langle i_p,a_p^j\right\rangle\right\rangle\right\}^m \times^R_{D^s} \left\{\left\langle\left\langle h_1,b_1^l\right\rangle,\left\langle h_2,b_2^l\right\rangle,\dots,\left\langle h_q,b_q^l\right\rangle\right\rangle\right\}^k =$$

$$=\left\{\left\langle\left\langle i_1,a_1^j\right\rangle,\dots,\left\langle i_p,a_p^j\right\rangle,\left\langle h_1,b_1^l\right\rangle,\dots,\left\langle h_q,b_q^l\right\rangle\right\rangle\right\}^{mk}.$$

$\Pi^R_{D^s}$ – функція видалення першого стовпчика $\{D_1,\dots,D_s\}$-реляції: $\Pi^R_{D^s}(\{\Lambda\}) = \{\Lambda\}$, $\Pi^R_{D^s}(\mathcal{A}) = \{<< i_2, a_2 >, \dots < i_k, a_k >>\}^m$;

$=^R_{D^s}$ – предикат рівності на множині $R_{\{D_1,\dots,D_s\}}$; R_s;

$I^n_m|^{n=1,2,\dots}_{m=\overline{1,n}}$ – селекторні функції.

Тепер звернемось ізоморфізму ППА $A^{\text{чр}}_{D^l}$ та $A^{\text{чр}}_{R_s}$. Розглянемо кодуюче та декодуюче відображення між множинами мультідоменних кортежів та реляцій, D^s та R_s.

Для коректності подальших побудов, необхідно впевнитись у існуванні ефективної нумерації множини R_s. Здійснимо побудову ефективної нумерації в декілька кроків. По-перше, необхідно врахувати, що для будь-якої непустої m-рядкової $\{D_1,\dots,D_s\}$-реляції R її номер співпадає з номером скінченної множини $M_R = \{n_1,\dots,n_m\}$ номерів окремих її рядків. Для самої ж множини M_R, її номер задається, наприклад, так: $\alpha_{M_R}(R) = 2^{n_{i_1}+1}\cdot 3^{n_{i_2}+1}\cdot\ldots\cdot p_{m-1}^{n_{i_m}+1}$, де $n_{i_1} < \dots < n_{i_m}$, $n_{i_t} \in M_R, t = \overline{1,m}$, а $p_k|_{k=0,1,2,\dots}$, а – k-те просте число. Тоді нумерація α_{R_s} множини R_s задається через наступну кускову схему $\alpha'_{R_s}(R) = \begin{cases}1, & \text{якщо } R = \emptyset\\ \alpha_{M_R}(R), & \text{інакше}\end{cases}$. α'_{R_s}, очевидно, є бієкцією. Тому можна покласти $\alpha_{R_s} = (\alpha'_{R_s})^{-1}$. З побудови випливає ефективність α_{R_s}.

З наведеного безпосередньо випливає, що будь-яка непуста m-рядкова $\{D_1,\dots,D_s\}$-реляція R, $m \geq 2$ може бути представлена $\{D_1,\dots,D_s\}$-кортежем виду $\left\langle\left\langle 1, r(R)\right\rangle\right\rangle \circ_{D^s} \alpha_{D_1^s}(n_{i_1}) \circ_{D^s} \dots \circ_{D^s} \alpha_{D_1^s}(n_{i_m})$. Однорядкова $\{D_1,\dots,D_s\}$-реляція, представляються приналежним їй кортежем. Тобто, будь-якій мультидоменній однорядковій реляції $\{\mathcal{K}\}$ такій, що $(\mathcal{K} \neq \Lambda)\&(r(\{\mathcal{K}\}) > 1)$ ставиться у відповідність мультидоменний кортеж $\mathcal{K}$; випадку, коли $(\mathcal{K} = \Lambda) \vee (r(\{\mathcal{K}\}) = 1)$ відповідає кортеж $S_{D^s}(\mathcal{K})$, а пустій реляції $\varnothing$ – кортеж $\langle\langle 1,0\rangle\rangle$. Так побудоване відображення $\varphi^R : R_s \to D^s$ T бієкцією. І хоча вона не є R_s-функцією, враховуючи існування ефективних нумерацій для множин R_s та D^s і, як наслідок, конструктивності об'єктів, які входять до них, відображення φ^R може бути безпосередньо використано для безпосередньої побудови шуканого кодуючого R_s-відображення. Для цього використаємо допоміжне відображення $\Phi^R: D^s \to R_s$ таке, що $\Phi^R(\Lambda) = \{\Lambda\}$ та $\Phi^R(\mathcal{K}) = \{\mathcal{K}\}$. Позначимо $\psi^R \equiv \varphi^R \cdot \Phi^R$ та χ^R – деяке розширення відображення $\left(\psi^R\right)^{-1}$. Позначимо через σ_{R_s} сукупність уведених вище чр-R_s-функцій та предикатів, тобто $\sigma_{R_s} \equiv \{C^1_{\{<0>\}}, S^R_{D^s}, \times^R_{D^s}, \Pi^R_{D^s}, =^R_{D^s}, \psi^R, \chi^R, I^n_m|^{n=1,2,\dots}_{m=\overline{1,n}}\}$. З наведених вище побудов безпосередньо слідує наступне твердження.

Теорема 5. Сукупність $\sigma_{R_s|_{s=1,2,\dots}}$ – повна система алгебри $A^{\text{чр}}_{R_s}|_{s=1,2,\dots}$

Висновки. У роботі досліджено побудову рішень програмістських задач на основі композицій ППА, які є репрезентативними представниками загального поняття композиції. Представлено метод для пошуку повних систем у ППА шляхом побудови відповідних ізоморфізмів ППА. Обґрунтовано використання методу як інструменту підтримки програмування без втрати інформаційних та інтелектуальних інвестицій. На основі понять ПР-системи та повної системи показана можливість вирішення проблеми повноти у класах функцій та предикатів над зліченими мультидоменними носіями. Дослідження у цьому напрямку спрямовані на розвиток технологічного середовища програмування, фундаментом якого є загальне поняття композиції, та на розробку редукційних методів дослідження функцій як засобів прагматико-обумовленої декомпозиції програмістських задач.

Список літератури:

1. Редько І. В., Редько Д. І., Захарченко Т. Л. Концептологічні основи проектування, Київ : Компринт, 2016, 154 с

2. Національний стандарт України ДСТУ ISO 9001:2015 (ISO 9001:2015, IDT), Системи управління якістю, Київ : УкрНДНЦ, 2016, 21 с.

3. Bui D.B., Red'ko I.V. Primitive program algebras of computable functions. *Cybern Syst Anal* , 368–377 (1987). https://doi.org/10.1007/BF01074828

4. Захарченко Т.Л., Редько Д.І., Редько І.В., Яганов П.О. Примітивна програмна алгебра обчислюваних функцій над записами. *Наукові вісті КПІ*. 2015. №2. С. 29–40.

5. Sartipi K., Dehmoobad A. Cross-Domain Information and Service Interoperability. *iiWAS'08*. November 24-26. 2008. Linz, Austria Copyright 2008 ACM 978-1-60558-349-5/08/0011

6. Guijarro L. Semantic interoperability in egovernment initiatives. Computer Standards and Interfaces (in press), November 2007.

7. David Chen, Guy Doumeingts, Francois Vernadat. Architectures for enterprise integration and interoperability: Past, present and future. In Comput Industry (Ind), 2008.

8. Grace A. Lewis, et al. Why standards are not enough to guarantee end-to-end interoperability. In ICCBSS '08, pages 164–173, Washington, DC, USA, 2008. IEEE Computer Society.

9. Hamid R. Motahari Nezhad, et al. Web services interoperability specifications. Computer, 39(5). 24–32, May 2006.

10. ACM Turing award lectures. Association for Computing Machinery. NY, USA, 2007, 396 p.p. DOI: https://doi.org/10.1145/1283920

11. O.-J. Dahl E. W. Dijkstra C. A. R. Hoare *"Structured Progrumming"*// ACADEMIC PRESS INC. (LONDON) LTD, 1972, 227p.p., Library of Congress Catalog Card Number 72-84452

12. Curry H.D., Hindley R., Seldin J. P. *Combinatory Logic. Studies in Logic*". North-Holland Co., Amsterdam, 1972.

13. Church, Alonzo *Introduction to Mathematical Logic*. Princeton University Press. 1996, 392 pp. ISBN 978-0-691-02906-1

14. Dijkstra E.W. A Discipline of Programming. Prentice-Hall, 1976.

15. Gries D. The Science of Programming. Springer-Verlag, 1981

16. Wirth N. The Programming Language Oberon. Revision 1.9.2007

17. Kazman R., Jeromy S. Carriere View Extraction and View Fusion in Architectural Understanding, Proceedings of the Fifth International Conference on Software Reuse (ICSR), Victoria, BC, 1998

18. Comella-Dorda S., Wallnau K., Seacord R., Robert J. A Survey of Legacy System Modernization Approaches, Pittsburgh,USA: Software Engineering Institute, 2000

19. Maltsev A.I. Algorithms and recursive functions*,* Wolters-Noordhof, Groningen, 1970

20. Mal′tsev. Constructive algebras. I. English translation of the preceding by K. A. Hirsch. Russian mathematical surveys, vol. 16 no. 3 (1961), pp. 77–129

21. Ershov Yu. L. The Theory of Numerations, Vol. 1, Novosibirsk (1969)

22. Буй Д.Б., Редько В.Н, Брона Ю.Й., Поляков С.Л. Реляційні бази даних: табличні алгебри та sql-подібні мови. ВД "Академперіодика", Київ, 2001, 198 с.

23. Редько І.В., Снігур Н.М. Примітивна програмна алгебра обчислюваних функцій над графами. *Наукові вісті НТУУ "КПІ"*. 2011. № 4. С. 75–80.

24. Bui D.B., Mavlyanov A.V. Theory of program algebras. Ukr Math J 36, 576–579 (1984). https://doi.org/10.1007/BF01268431 Bui, D.B., Mavlyanov, A.V. Theory of program algebras. Ukr Math J 36, 576–579 (1984). https://doi.org/10.1007/BF01268431

25. Chris Okasaki. Purely Functional Data Structures. — Cambridge University Press, 1998. 232 p.p. ISBN 978-0521663502

26. Alfred V. Aho, John E.Hopkroft, Jeffrey D.Ullman Data Structures and Algorithms. Addison-Wesley, 1983. 427 p.p. ISBN 0-201-00023-7

Redko D.I., Redko I.V. PRIMITIVE PROGRAMMING ALGEBRAS OF COMPUTABLE FUNCTIONS OVER MULTIDOMAIN TUPLES AND RELATIONS

The paper proposes a method for solving completeness problems for classes of computable functions based on the isomorphism of primitive program algebras (PPA). Complete generating systems for the PPA of computable functions over multidomain tuples and relations have been obtained.

A characteristic feature of the present day is the rapid pace of informatization in almost all areas of human activity. The informatization and technological provision of involved processes require the application of complex multidimensional and multidomain (polydomain, multidomain) data structures such as matrices, tuples, relations, graphs, and so on. Along with this, the requirements for the software itself and its development technologies are becoming more stringent. Meeting these requirements is complicated under conditions where software qualitative characteristics are evaluated only indirectly, based on the results of its external characteristics and its use. To remove said complications it is required to transition from art to technology of programming. Therefore, the creation and development of real bases for the technologization of programming, which rely on the cause-and-effect supplementation of programming and the program, are crucial.

The research conducted in the paper is based on algebraic methods for studying programs and methods of compositional programming. The latter are founded on program algebras, whose carriers are special classes of functions, and whose operations are compositions representing abstractions from means of program synthesis.

The concept of isomorphism in primitive program algebras (PPA) has been studied. The completeness problem of PPA in classes of computable functions and predicates over countable carriers has been solved. A rigorous definition of the concepts of a multidomain tuple and a multidomain relation is provided, and their fundamental properties for further constructions are researched. The choice of multidomain structures is due to their importance and active use in the informational support of solutions to applied problems in various fields. Along with general results on completeness, PPA-characteristics of classes of computable functions and predicates over multidomain tuples and multidomain relations have been obtained. These applied results complement the results for vector, matrix, and relational computable functions and enrich them substantively in the context of the technologization of programming.

Key words: *PPA, tuple, multidomain, relation, computability, isomorphism.*

Дата надходження статті: 07.09.2025
Дата прийняття статті: 21.09.2025
Опубліковано: 16.12.2025